CN 53-1189/P ISSN 1672-7673

粒子滤波综述

吕德潮[1,2]，范江涛[1,2]，韩刚瓮[3]，马冠一[1]

（1. 中国科学院国家天文台，北京 100012；2. 中国科学院大学物理科学学院，北京 100049；
3. 北京航天飞行控制中心，北京 100094）

摘要：主要对粒子滤波算法进行综述。首先详细描述了递归贝叶斯估计的基本原理和基于蒙特卡罗方法的重要性采样/重采样技术，在此基础上引出了粒子滤波标准算法——序贯重要性采样算法和序贯重要性重采样算法。针对这两个算法在应用中存在的问题，从提高算法的有效性和实时性两个方面，对近年来国内外在粒子滤波理论及应用研究方面开展的工作进行了介绍、分析归纳了改进粒子滤波算法及其主要改进思想。最后，对粒子滤波算法的研究方向进行了展望。

关键词：数据处理；粒子滤波算法；综述；非线性滤波；递归贝叶斯估计；重要性采样/重采样

中图分类号：TN911.72　**文献标识码**：A　**文章编号**：1672-7673(2013)04-0397-13

粒子滤波(Particle Filter，PF)，又称为序贯蒙特卡罗(Sequential Monte Carlo，SMC)方法，是一种基于蒙特卡罗方法[1]的贝叶斯滤波[2]技术。粒子滤波的基本原理是寻找一组在状态空间[3]传播的随机粒子(样本)描述系统的状态，通过蒙特卡罗方法处理贝叶斯估计中的积分运算[4]，从而得到系统状态的最小均方差估计。当粒子数量趋于无穷时可以逼近服从任意概率分布的系统状态。与其它滤波技术相比，粒子滤波不需要对系统状态作任何先验性假设，原则上可应用于任何能用状态空间模型描述的随机系统。

粒子滤波的思想最早出现于20世纪50年代，被用于处理统计学和理论物理领域中的状态估计。20世纪60年代末，粒子滤波在自动控制领域得到了应用，并于70年代得到了一定的发展[5-9]。但是历史上有两个问题限制了粒子滤波的进一步发展。第一个问题是粒子滤波的计算量很大，这对于当时的计算水平是一个很大的挑战。另一个问题是粒子退化现象，导致计算资源的浪费和计算结果的偏差。后一个问题直到1993年Gordon等人在提出自举滤波(Bootstrap Filter，BF)算法[10]时通过引入重采样步骤才得到有效解决。随后随着半导体技术的发展，计算资源的性价比越来越高，粒子滤波又逐渐成为科学、工程和金融领域中重点关注的技术。目前，粒子滤波已在数字通信、金融领域数据分析、统计学、图像处理、计算机视觉、自适应估计、语音信号处理、机器学习等领域展开应用研究[11-24]。

粒子滤波的研究在中国最早见于2003年，文[25]作者提出了一种性能优于标准粒子滤波的高斯-厄米特粒子滤波器，文[26]作者把粒子滤波用于混合系统状态监测与诊断。随后，粒子滤波得到了国内学者广泛的关注并被尝试应用于目标跟踪、组合导航和通信等领域[27-32]。目前，粒子滤波在我国也已成为理论研究的热点之一，其应用领域不断得到扩展[33-46]。

本文重点阐述了粒子滤波的理论基础、算法实现和主要改进思想。第1节给出了粒子滤波的研究对象。第2节和第3节是与粒子滤波相关的理论基础，分别介绍了递归贝叶斯估计和基于蒙特卡罗方法的重要性采样/重采样技术。第4节详细描述了粒子滤波的两个标准算法：序贯重要性采样算法和序贯重要性重采样算法。第5节针对粒子滤波在应用中存在的问题，从算法有效性和算法实时性两个方面归纳概括了现有的主要改进思想。最后是对本文的总结和对粒子滤波研究前景的展望。

收稿日期：2012-10-12，修定日期：2012-11-02

作者简介：吕德潮，男，硕士. 研究方向：卫星导航与通信. Email：kktflifj@126.com

1 研究对象

在科学研究和工程应用中，对于某些系统，可以用以下的状态空间模型来描述：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_k &= f(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_k \\ \boldsymbol{y}_k &= h(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \end{aligned} \tag{1}$$

(1)式中粗体表示向量，下标表示时刻。(1)式的第1个方程称为状态方程，向量 $\boldsymbol{x}$ 表示系统的状态；函数 $f(\cdot)$ 是系统的状态转移函数；向量 $\boldsymbol{w}$ 是系统的过程噪声。第2个方程称为量测方程，向量 $\boldsymbol{y}$ 表示系统的量测；函数 $h(\cdot)$ 是系统的量测函数；向量 $\boldsymbol{v}$ 是系统的量测噪声。

系统的量测可以通过各种技术手段得到，而系统的状态往往包含研究者感兴趣的信息。序贯地利用系统的量测 $\boldsymbol{y}_k$，更新对系统状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的估计，是粒子滤波解决的问题。

2 递归贝叶斯估计

由(1)式确定的系统具有以下的特点：系统 k 时刻的状态只与 k-1 时刻的状态有关，与 $0:k$-2 时刻的状态和 $0:k$-1 时刻的量测无关；系统 k 时刻的量测只与 k 时刻的状态有关，与 $0:k$-1 时刻的状态和 $0:k$-1 时刻的量测无关。

如果函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 的表达式以及噪声 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的分布都是已知的，则根据(1)式可以确定系统的状态转移概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 和量测概率密度函数 $p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)$。假设系统初始状态的概率密度函数为 $p(\boldsymbol{x}_0)$，并且 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是相互独立的白噪声，则系统 $0:n$ 时刻的状态和量测的联合概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}, \boldsymbol{y}_{0:n})$ 为：

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}_{0:n}, \boldsymbol{y}_{0:n}) &= p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_{0:n}, \boldsymbol{y}_{0:n-1})p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{0:n-1}, \boldsymbol{y}_{0:n-1})p(\boldsymbol{x}_{0:n-1}, \boldsymbol{y}_{0:n-1}) \\ &= p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_n)p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{n-1})p(\boldsymbol{x}_{0:n-1}, \boldsymbol{y}_{0:n-1}) \\ &= p(\boldsymbol{y}_0|\boldsymbol{x}_0)p(\boldsymbol{x}_0)\prod_{k=1}^{n}p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}) \end{aligned} \tag{2}$$

根据贝叶斯定理，系统状态在已知量测下的条件概率密度函数，即后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 可以递归地表示为：

$$p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n-1}) = p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{n-1})p(\boldsymbol{x}_{0:n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1}) \tag{3}$$

$$p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_n)p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n-1})}{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{y}_{0:n-1})} \tag{4}$$

(4)式中的分母是分子的积分。

当 n 很大时，(3)式和(4)式的计算量是非常大的。在实际应用中，通常只需要关心当前时刻系统状态的后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n})$，

$$p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n-1}) = \int_{R^{n_x}} p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{n-1})p(\boldsymbol{x}_{n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_{n-1} \tag{5}$$

$$p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n}) = \frac{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_n)p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n-1})}{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{y}_{0:n-1})} \tag{6}$$

(5)式中 n_x 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的维数；R^{n_x} 表示向量 $\boldsymbol{x}$ 的取值空间，(6)式中的分母是分子的积分。

(3)式和(4)式、(5)式和(6)式描述了递归贝叶斯估计的基本原理。(3)式和(5)式称为预测公式，(4)式和(6)式称为更新公式。由(5)式和(6)式可以递归地计算系统在任意时刻状态的后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n})$，则系统状态的最小均方差估计是条件期望：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{\mathrm{n}} = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n}] = \int_{R^{n_x}} \boldsymbol{x}_n p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}_n \tag{7}$$

(5)式、(6)式和(7)式的计算涉及高维向量的积分，如果函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 是非线性的，或者噪声 $\boldsymbol{w}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 的分布比较复杂，则一般情况下无法解析地求解，所以理论意义远远大于实际应用价值，这也是递归贝叶斯估计被称为贝叶斯滤波框架的原因。

通过对系统作一些先验性假设，如假设函数 $f(\cdot)$ 和 $h(\cdot)$ 可以用简单的表达式近似、或者假设系统状态服从某个特定分布等，可以有效地简化问题，由此衍生出一系列滤波算法[47-58]。但是这些滤波算法受到假设的限制，应用范围较窄，尤其是在处理复杂非线性、非高斯系统时，滤波结果往往较差。

3　重要性采样/重采样

重要性采样/重采样[4]，是统计学上应用蒙特卡罗方法，用服从一个分布的样本去估计另一个分布的技术，用于处理贝叶斯估计中的复杂积分问题，是粒子滤波得以应用的关键。

3.1　蒙特卡罗方法

蒙特卡罗方法的核心思想是用事件发生的“频率”估计事件的“概率”，通过重复随机采样解决复杂问题[1,14,59]。

假设有一个概率密度函数为 $p(\boldsymbol{x})$ 的随机向量 $\boldsymbol{x}$，则 $\boldsymbol{x}$ 的函数 $g(\boldsymbol{x})$ 的期望为：

$$E[g(\boldsymbol{x})] = \int_{R^{n_x}} g(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{8}$$

通常积分项 $g(\boldsymbol{x})p(\boldsymbol{x})$ 的形式比较复杂，难以用解析的方法求解。如果 $\{\boldsymbol{x}^{(i)} \mid i=1,2,\cdots N\}$ 是一组从 $p(\boldsymbol{x})$ 采样得到的样本，则 $g(\boldsymbol{x})$ 的期望可以用平均值近似：

$$\hat{E}_{MC}[g(\boldsymbol{x})] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g(\boldsymbol{x}^{(i)}) \tag{9}$$

由(9)式计算得到的平均值是对(8)式计算得到的期望的无偏估计，根据弱大数定理，当 N 足够大时，两者是非常接近的，并且一个复杂的高维向量积分问题现在被转化为一个求平均值的问题了。

3.2　重要性采样

如果存在一个函数 $p'(\boldsymbol{x})$ 满足 $p(\boldsymbol{x})=\frac{p'(\boldsymbol{x})}{\int_{R^{n_x}} p'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$，即满足 $p(\boldsymbol{x}) \propto p'(\boldsymbol{x})$，但是 $p(\boldsymbol{x})$ 是未知的，则无法直接从 $p(\boldsymbol{x})$ 采样。但是如果存在另一个概率密度函数 $q(\boldsymbol{x})$，那么利用从 $q(\boldsymbol{x})$ 采样得到的样本也同样可以估计 $g(\boldsymbol{x})$ 的期望。首先将(8)式改写成如下的形式：

$$\begin{aligned} E[g(\boldsymbol{x})] &= \int_{R^{n_x}} g(\boldsymbol{x})\frac{p(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})}q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \\ &= \frac{\int_{R^{n_x}} g(\boldsymbol{x})\frac{p'(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})}q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\int_{R^{n_x}} \frac{p'(\boldsymbol{x})}{q(\boldsymbol{x})}q(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}} \end{aligned} \tag{10}$$

如果 $\{\boldsymbol{x}'^{(i)} \mid i=1,2,\cdots,N\}$ 是从 $q(\boldsymbol{x})$ 采样得到的样本，则 $g(\boldsymbol{x})$ 的期望可以近似为：

$$\hat{E}_{IS}[g(\boldsymbol{x})] = \frac{\sum_{i=1}^{N} g(\boldsymbol{x}'^{(i)})\frac{p'(\boldsymbol{x}'^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)})}}{\sum_{i=1}^{N}\frac{p'(\boldsymbol{x}'^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)})}} \tag{11}$$

设 $\omega^{(i)}=\frac{p'(\boldsymbol{x}'^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)})}$，$\widetilde{\omega}^{(i)}=\omega^{(i)}/\sum_{j=1}^{N}\omega^{(j)}$，则：

$$\hat{E}_{IS}[g(\boldsymbol{x})] = \sum_{i=1}^{N} g(\boldsymbol{x}'^{(i)})\widetilde{\omega}^{(i)} \tag{12}$$

与直接使用蒙特卡罗方法不同，由(12)式计算得到的估计值是对期望的渐近无偏估计[13]。

这种用服从一个分布的样本去估计另一个分布的属性的技术在统计学上称为重要性采样(Importance Sampling，IS)。把 $q(\boldsymbol{x})$ 称为重要性函数，由 $q(\boldsymbol{x})$ 确定的分布为重要性分布，$\widetilde{\omega}^{(i)}$ 为归一化权重，$\omega^{(i)}$ 为未归一化权重。

比较(8)式和(12)式，$p(\boldsymbol{x})$ 可以估计为：

$$\hat{p}_{IS}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\omega}^{(i)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'^{(i)}) \tag{13}$$

为了描述的方便，将从 $q(\boldsymbol{x})$ 采样得到的样本记为 $\{\boldsymbol{x}^{(i)}\mid i=1,2,\cdots,N\}$，则重要性采样的算法描述如下。

重要性采样算法：

已知函数 $p'(\boldsymbol{x})$，一个随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的概率密度函数为 $p(\boldsymbol{x})=\dfrac{p'(\boldsymbol{x})}{\int_{R^{n_x}}p'(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$，即 $p(\boldsymbol{x})\propto p'(\boldsymbol{x})$。

第 1 步：从重要性函数 $q(\boldsymbol{x})$ 采样得到样本 $\{\boldsymbol{x}^{(i)}\mid i=1,2,\cdots,N\}$；

第 2 步：计算每一个样本的未归一化权重 $\omega^{(i)}=\dfrac{p'(\boldsymbol{x}^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}^{(i)})}$；

第 3 步：对权重进行归一化处理 $\widetilde{\omega}^{(i)}=\omega^{(i)}\Big/\sum_{j=1}^{N}\omega^{(j)}$；

第 4 步：估计随机向量 $\boldsymbol{x}$ 的属性 $\hat{p}(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{N}\widetilde{\omega}^{(i)}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^{(i)})$ $\hat{E}[g(\boldsymbol{x})]=\sum_{i=1}^{N}g(\boldsymbol{x}^{(i)})\widetilde{\omega}^{(i)}$

3.3 重要性重采样

在某些应用中，可能还需要得到服从 $p(\boldsymbol{x})$ 的样本。从一个分布的样本得到另一个分布的样本的技术称为重要性重采样(Importance Resampling，IR)。有两种方法——拒绝法和自举法，可以实现重采样，证明过程见文[4]。

方法一：拒绝法

假设存在 $M>0$，并且对所有 $\boldsymbol{x}$，$p'(\boldsymbol{x})/q(\boldsymbol{x})\leqslant M$ 成立。

第 1 步：$j=1$，$k=1$；

第 2 步：从 $q(\boldsymbol{x})$ 产生样本 $\boldsymbol{x}^{(j)}$；

第 3 步：从均匀分布(0，1)产生随机数 u；

第 4 步：如果 $u\leqslant p'(\boldsymbol{x}^{(j)})/Mq(\boldsymbol{x}^{(j)})$，则 $\boldsymbol{x}^{*(k)}=\boldsymbol{x}^{(j)}$，$k=k+1$；

第 5 步：如果 $k<N^*$，则 $j=j+1$，并回到第 2 步；

第 6 步：$\{\boldsymbol{x}^{*(i)}\mid i=1,2,\cdots,N^*\}$ 是服从 $p(\boldsymbol{x})$ 的样本。

拒绝法适合 M 能够被方便的计算的情况，且能够产生任意数量的样本，但是算法的运行次数是随机的。对于 M 无法被方便地计算，或对算法运行次数有限制的情况，可以采样自举法。

方法二：自举法

假设 $\{\boldsymbol{x}^{(i)}\mid i=1,2,\cdots,N\}$ 是服从 $q(\boldsymbol{x})$ 的一组样本，$\widetilde{\omega}^{(i)}$ 是样本的归一化权重，并令 $\widetilde{\omega}^{(0)}=0$。

第 1 步：$k=1$；

第 2 步：从均匀分布(0，1)产生随机数 u；

第 3 步：如果 $\sum_{i=0}^{j-1}\widetilde{\omega}^{(i)}<u\leqslant\sum_{i=0}^{j}\widetilde{\omega}^{(i)}$，则 $\boldsymbol{x}^{*(k)}=\boldsymbol{x}^{(j)}$，$k=k+1$；

第 4 步：如果 $k<N^*$，则回到第 2 步；

第 5 步：$\{\boldsymbol{x}^{*(i)}\mid i=1,2,\cdots,N^*\}$ 是服从 $p(\boldsymbol{x})$ 的样本。

自举法和拒绝法的基本思想都是选取权重大的样本，舍弃权重小的样本，但是与拒绝法不同，自举法只在有限的范围内选取样本，并且权重大的样本可能会被多次选取。为了保持样本的随机性，一般取 $N^*\leqslant N$。如果 $N^*\ll N$，则自举法和拒绝法是等效的。

4 粒子滤波算法

虽然目前存在很多种粒子滤波的具体算法，但是这些算法都是在两个标准算法的基础上改进而来的。这两个标准算法分别是序贯重要性采样(Sequential Importance Sampling，SIS)算法[7-8]和序贯重要性重采样(Sequential Importance Resampling，SIR)算法[10,60]。

4.1 序贯重要性采样算法

序贯重要性采样算法是重要性采样在贝叶斯滤波框架下的序贯实现[60-62]，推导过程如下。

对于(1)式描述的随机系统，如果有服从后验概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 的粒子 $\{\boldsymbol{x}_{0:n}^{(i)}|i=1,2,\cdots,N\}$，则根据(9)式，系统状态的函数 $g(\boldsymbol{x}_{0:n})$ 的期望可以用平均值近似：

$$\hat{E}_{MC}[g(\boldsymbol{x}_{0:n})|\boldsymbol{y}_{0:n}]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}g(\boldsymbol{x}_{0:n}^{(i)}) \tag{14}$$

通常情况下，得到 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 的解析表达式是非常困难的，所以也无法容易得到服从 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 分布的粒子。但是与 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 成正比的函数 $p(\boldsymbol{x}_{0:n},\boldsymbol{y}_{0:n})$ 是已知的(见(1)式)，根据重要性采样，选取一个合适的重要性分布，设其概率密度函数为 $q(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$，则根据(12)式，用从 $q(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 采样得到的粒子 $\{\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n}|i=1,2,\cdots,N\}$ 就可以估计 $g(\boldsymbol{x}_{0:n})$ 的期望：

$$\hat{E}_{IS}[g(\boldsymbol{x}_{0:n})|\boldsymbol{y}_{0:n}]=\sum_{i=1}^{N}g(\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n})\widetilde{\omega}_n^{(i)} \tag{15}$$

分析(3)式和(4)式，可得 $p(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})\propto p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}_n)p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{n-1})p(\boldsymbol{x}_{0:n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1})$，为了能递归地计算归一化权重 $\widetilde{\omega}_n^{(i)}$，将 $q(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})$ 构造为：

$$q(\boldsymbol{x}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})=q(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{x}_{n-1},\boldsymbol{y}_n)q(\boldsymbol{x}_{0:n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1}) \tag{16}$$

则

$$\begin{aligned}\omega_n^{(i)}&\propto\frac{p(\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n}|\boldsymbol{y}_{0:n})}\\&\propto\frac{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_n)p(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1},\boldsymbol{y}_n)}\cdot\frac{p(\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)}_{0:n-1}|\boldsymbol{y}_{0:n-1})}\\&\propto\frac{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_n)p(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1},\boldsymbol{y}_n)}\cdot\widetilde{\omega}_{n-1}^{(i)}\end{aligned} \tag{17}$$

因此，重要性权重 $\widetilde{\omega}_n^{(i)}$ 可以用以下的公式更新：

$$\omega_n^{(i)}=\frac{p(\boldsymbol{y}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_n)p(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1})}{q(\boldsymbol{x}'^{(i)}_n|\boldsymbol{x}'^{(i)}_{n-1},\boldsymbol{y}_n)}\cdot\widetilde{\omega}_{n-1}^{(i)} \tag{18}$$

$$\widetilde{\omega}_n^{(i)}=\omega_n^{(i)}\Big/\sum_{j=1}^{N}\omega_n^{(i)} \tag{19}$$

(18)式的计算与 $0:n-2$ 时刻的状态和 $0:n-1$ 时刻的量测无关，因此实际操作中不需要存储这些数据。

令(15)式中的 $g(\boldsymbol{x}_{0:n})=\boldsymbol{x}_n$，则系统状态在 n 时刻的条件期望可以近似为：

$$\hat{E}_{SIS}[\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{y}_{0:n}]=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}'^{(i)}_n\widetilde{\omega}_n^{(i)} \tag{20}$$

为了描述的方便，将从 $q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{y}_k)$ 采样得到的样本记为 $\{\boldsymbol{x}_k^{(i)}|i=1,2,\cdots,N\}$，则 SIS 算法的步骤如下：

SIS 算法：

第 1 步：$k=0$，从 $q(\boldsymbol{x}_0 \mid \boldsymbol{y}_0)$ 采样得到样本 $\{\boldsymbol{x}_0^{(i)} \mid i=1,2,\cdots,N\}$，令 $\omega_0^{(i)}=\dfrac{p(\boldsymbol{y}_0 \mid \boldsymbol{x}_0^{(i)})p(\boldsymbol{x}_0^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}_0^{(i)} \mid \boldsymbol{y}_0)}$，跳到第 3 步；

第 2 步：从 $q(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{y}_k)$ 采样得到 $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$，$\omega_k^{(i)}=\dfrac{p(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k^{(i)})p(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{y}_k)}\cdot\widetilde{\omega}_{k-1}^{(i)}$；

第 3 步：计算归一化权重　$\widetilde{\omega}_k^{(i)}=\omega_k^{(i)}\Big/\sum_{j=1}^{N}\omega_k^{(j)}$；

第 4 步：估计系统的状态　$\hat{E}[\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{y}_{0:k}]=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_k^{(i)}\widetilde{\omega}_k^{(i)}$；

第 5 步：$k=k+1$，返回第 2 步。

当运行时间较短时，SIS 算法可以有较好的性能。但是当长时间运行时，SIS 算法便会出现粒子退化现象。所谓粒子退化现象，是指算法在经过一段时间的运行后，大部分粒子的权重接近于零，而只有少量粒子的权重很大的现象[60]。

从算法的推导过程可以看出，SIS 算法和 IS 算法是等价的，这说明 $\{\boldsymbol{x}_k^i \mid k=1:n\}$ 是一条连续的轨迹，是服从 $p(\boldsymbol{x}_{0:n} \mid \boldsymbol{y}_{0:n})$ 分布的一个样本。当 n 不断增加时，状态 $\boldsymbol{x}_{0:n}$ 的维数不断增加，而粒子数却是不变的，这是粒子退化现象产生的原因。由于权重接近于零的粒子对系统状态的估计的贡献很小，所以当粒子退化严重时，大量的计算资源被浪费了。并且如果这些粒子没有分布在真实状态的附近，这时算法就不收敛。

4.2　序贯重要性重采样

序贯重要性重采样算法(SIR)在 SIS 算法的基础上添加了重采样步骤。在 SIS 算法中，粒子权重的无条件方差随着时间而增加，所以粒子退化是不可避免的[60]。1993 年，文[10]作者提出在 SIS 算法的基础上增加重采样步骤，这个思想成为解决粒子退化现象的有效方案。当重采样发生时，权重大的粒子被选取，权重小的粒子被舍弃，然后将所有粒子的权重设为相等。本文第 3 节提到的两种重采样算法都是可以应用的，因为自举法的循环次数是可以固定的，所以一般采用自举法，并设 $N^*=N$。

在文[10]提出的自举滤波算法中，每一次递归过程都发生重采样，但是这样做会大大增加算法的运算时间。文[63]作者提出了用有效粒子数(记为 N_{eff})的概念来描述粒子退化的程度。只当有效粒子数 N_{eff} 小于一定的门限值 N_{thres} 时，才进行重采样。有效粒子数可用以下的公式估计[60]

$$\hat{N}_{\text{eff}}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{\omega}_k^{(i)})^2} \tag{21}$$

SIR 算法的步骤如下：

SIR 算法：

第 1 步：$k=0$，从 $q(\boldsymbol{x}_0 \mid \boldsymbol{y}_0)$ 采样得到样本 $\{\boldsymbol{x}_0^{(i)} \mid i=1,2,\cdots,N\}$，令 $\omega_0^{(i)}=\dfrac{p(\boldsymbol{y}_0 \mid \boldsymbol{x}_0^{(i)})p(\boldsymbol{x}_0^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}_0^{(i)} \mid \boldsymbol{y}_0)}$，跳到第 3 步；

第 2 步：从 $q(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{y}_k)$ 采样得到 $\boldsymbol{x}_k^{(i)}$，$\omega_k^{(i)}=\dfrac{p(\boldsymbol{y}_k \mid \boldsymbol{x}_k^{(i)})p(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)})}{q(\boldsymbol{x}_k^{(i)} \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^{(i)},\boldsymbol{y}_k)}\cdot\widetilde{\omega}_{k-1}^{(i)}$；

第 3 步：计算归一化权重　$\widetilde{\omega}_k^{(i)}=\omega_k^{(i)}\Big/\sum_{j=1}^{N}\omega_k^{(j)}$；

第 4 步：估计系统的状态　$\hat{E}[\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{y}_{0:n}]=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{x}_k^{(i)}\widetilde{\omega}_k^{(i)}$；

第 5 步：估计有效粒子数　$\hat{N}_{\text{eff}}=\dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N}(\widetilde{\omega}_k^{(i)})^2}$

如果 $\hat{N}_{\text{eff}}<N_{\text{thres}}$，则用自举法对 $\{\boldsymbol{x}_k^{(i)} \mid i=1,2,\cdots,N\}$ 重采样，并将每个粒子的归一化权重设为 $\dfrac{1}{N}$；

第 6 步：$k=k+1$，返回第 2 步。

自举滤波算法是 SIR 算法的一个特殊实例，可以看成是 SIR 算法的简化版本。因为重采样在算法的

每一次循环中都进行，因此自举滤波算法不需要计算有效粒子数。另外，自举滤波算法选择 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 作为产生粒子的重要性函数。

重采样可以改变粒子的分布情况，打断了 SIS 算法中粒子轨迹的连续性，两次重采样之间的过程可以理解为是一段较短周期的 SIS 过程，所以粒子退化现象得到了抑制。但是如果采用自举法作为重采样的算法，则频繁的重采样可能会导致粒子多样性的丧失。因为自举法会复制权重大的粒子，所以在经过若干次重采样之后，可能会出现所有的粒子都是从少数粒子复制而来的现象，这被称为粒子多样性的丧失。并且如果这些粒子没有分布在真实状态的附近，这时算法就不收敛。

5　改进粒子滤波算法

粒子滤波的两个标准算法都存在着各自的局限性，并且作为一门比较新的滤波技术，在实际应用中会出现一些具体问题。在标准粒子滤波算法不能有效地解决问题时，研究者们便在标准算法的基础上，尝试提出改进算法。不同的状态空间模型、不同的应用，问题的表现形式也不一样。因此，在围绕粒子滤波算法进行理论研究的同时，也有一些研究者结合应用开展算法研究[11-46,60-70]。近年来发展的改进算法按其改进所达到的目的分为有效性改进与实时性改进两大类。在这两大类之下，再按照改进思想或采取具体方法的不同，进行分析归纳。

5.1　算法有效性

粒子滤波是基于蒙特卡罗方法的滤波技术，滤波结果的有效性与粒子数及粒子分布情况密切相关。增加粒子数可以减小结果的均方差，但是会增加运算量，并且在实际应用中粒子数也不可能无限制地增加。从粒子分布的角度考虑，为了保证算法的有效性，粒子应该尽可能地接近系统状态的真实分布。

5.1.1　重要性函数选择

重要性函数对粒子分布的影响是至关重要的。

将系统的状态转移概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 作为重要性函数[10]是一种简单易行的解决方案，但是这样做得到的粒子完全不包含量测的任何信息，只能应用于简单的系统中。

粒子权重的方差反映了粒子的分布情况。分析(17)式，如果 $q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{y}_k)\propto p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$，即

$$
\begin{aligned}
q(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{y}_k) &= \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{\int_{R^{n_x}} p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})\mathrm{d}\boldsymbol{x}_k} \\
&= \frac{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_k)p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})}{p(\boldsymbol{y}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})} \\
&= p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{y}_k)
\end{aligned}
\tag{22}
$$

此时粒子权重的更新与粒子的取值无关，权重的条件方差为零，称 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{y}_k)$ 为最佳重要性函数[6,9]。

用解析的方法直接得到最佳重要性函数通常是困难的，但是得到最佳重要性函数的近似估计是可能的。设计一个合适的重要性函数，必须考虑实际的应用环境，并令粒子权重的条件方差尽可能小。

如果系统的非线性程度不是很严重，可以借鉴扩展卡尔曼滤波的思想，将系统的状态空间模型线性化，然后近似地计算 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1},\boldsymbol{y}_k)$，这通常比直接使用 $p(\boldsymbol{x}_k|\boldsymbol{x}_{k-1})$ 可以取得更好的效果[11-12]。其它非线性滤波算法中用于估计系统状态后验概率密度函数的方法都可以应用到粒子滤波中，由此得到高斯和粒子滤波(Gaussian Sum Particle Filter，GSPF)[64]、无味粒子滤波(Unscented Particle Filter，UPF)[65]、高斯-厄米特粒子滤波(Gauss-Hermite Particle Filter，GHPF)[25]等。

5.1.2　重采样算法

重采样可以改变粒子的分布。自举滤波算法中利用的自举法重采样，是一种原理简单、计算方便

的重采样算法[10]，但是会导致粒子多样性丧失。设计合适的重采样算法，不仅要考虑粒子分布的改善，还要考虑多次迭代对算法的影响。

在某些应用场合，可以使用拒绝法作为重采样的算法，这时就不存在粒子复制的问题[66]。但是拒绝法的运算次数是随机的[4]，所以难以控制，并且可能与算法的实时性产生矛盾。

文[67]作者提出的辅助粒子滤波(Auxiliary Particle Filter，APF)算法是一种典型的基于重采样的改进粒子滤波算法。APF 的基本原理是根据下一时刻的量测来调整当前时刻的粒子，使重采样后的粒子在下一时刻具有较大的权重。

重采样-移动[68]是另一种改善粒子分布的策略。通过对重采样后的粒子进行 Markov Chain Monte Carlo(MCMC)移动处理，来增加粒子的多样性。

与其它学科交叉结合[38,45-46]，如文[46]提出将无味粒子滤波和反向传播神经网络相结合，通过调整粒子权重或分裂粒子，来优化粒子的分布。

5.2 算法实时性

滤波应用往往对算法的实时性有一定的要求。由于粒子滤波需要产生大量的粒子，所以计算量很大。虽然计算机技术的发展非常快，但是我们总是希望粒子滤波可以用更少的计算资源更快地输出滤波结果，在保证算法有效性的前提下提高算法的实时性非常有意义的。

5.2.1 改变粒子数

当粒子数是多少时，粒子数就足够多了，这是很难用数学证明的。但是在粒子分布情况比较好的情况下，适当地减少粒子数也可以获得相同精度的滤波结果。随着算法的运行，粒子分布情况总是在改变的，根据粒子的分布来自适应地改变粒子数[69]，可以有效地提高算法的实时性，同时算法的有效性也不会受到影响。设计粒子数改变的条件和步进是此类算法的关键。

5.2.2 边缘粒子滤波

如果系统状态的维数很高，但是系统的状态空间模型是部分线性的，则可将粒子滤波与卡尔曼滤波结合起来，这种算法称为 Rao-Blackwellized 粒子滤波(Rao-Blackwellized Particle Filter，RBPF)[60]或边缘化粒子滤波(Marginalized Particle Filter，MPF)[70]，此时算法的实时性将得到很大的提高。

6 总结和展望

粒子滤波是一种基于蒙特卡罗方法的贝叶斯滤波技术。对于任何能够用状态空间模型描述的系统，都可以应用粒子滤波。从 20 世纪 50 年代提出、90 年代 SIS 和 SIR 两个标准算法的确立，至今，粒子滤波已有了 60 年的历史。虽然粒子滤波算法的的主要发展是在近 20 年，但是国内外研究者已经在 SIS 和 SIR 算法的基础上，针对理论和应用研究，从算法的有效性和实时性两个方面提出了丰富多彩的改进算法。

作为一种新方法，粒子滤波算法还不尽成熟，在实际应用中还存在一些问题，所以既需要对粒子滤波进行更深入地理论研究，也需要在实际应用环境中有针对性地进行改进。从粒子滤波的研究现状来看，未来粒子滤波的研究方向将主要集中在以下几个方面：

(1)重要性函数选择。选择的重要性函数越接近最佳重要性函数，滤波结果就越接近真实值，但是也会使算法变得越复杂，甚至无法实现。在不同的应用场合，必须对算法的复杂性与有效性进行权衡，才能选择合适的重要性函数。

(2)重采样算法研究。设计重采样算法是一项既有创造性也有挑战性的工作，不仅需要考虑粒子分布的改善，还需要考虑多次迭代对算法的影响。从其它学科可能获得一些灵感。

(3)算法实时性提升。计算量大是粒子滤波的主要缺点之一，实时性的提升对粒子滤波的理论研究和实际应用都非常有帮助。自适应地改变粒子数，或与其它线性滤波技术结合，都可以有效地提升算法的实时性。

(4)收敛性证明。虽然当前有很多关于粒子滤波的文献，但是对算法本身的严格证明却很少被提

及。虽然各种文献的仿真结果和实验数据支持粒子滤波的收敛性，但是如果能从理论上进行分析，对于算法的优化必将有很大帮助。

粒子滤波由于不需要对系统作任何先验性假设，在处理复杂的非线性、非高斯系统的状态估计问题，较其它方法更具优势。随着计算机技术的发展，粒子滤波理论研究的深入，粒子滤波算法必将得到进一步的发展，并在相关领域得以应用。

参考文献：

[1] Metropolis N, Ulam S. The monte carlo method [J]. Journal of the American Statistical Association, 1949, 44(247): 335-341.

[2] Ho Y, Lee R. A bayesian approach to problems in stochastic estimation and control [J]. IEEE Transaction on: Automatic Control, 1964, 9(4): 333-339.

[3] Friedland B. Control systems design: an introduction to state-space methods [M]. New York: Dover Publications, 2005.

[4] Smith A F M, Gelfand A E. Bayesian statistics without tears: a sampling-resampling perspective [J]. The American Statistician, 1992, 46(2): 84-88.

[5] Akashi H, Kumamoto H. Construction of discrete-time nonlinear filter by Monte Carlo methods with variance-reducing techniques [J]. Systems and Control, 1975, 19: 211-221.

[6] Akashi H, Kumamoto H. Random sampling approach to state estimation in switching environments [J]. Automatica, 1977, 13(4): 429-434.

[7] Handschin J E, Mayne D Q. Monte Carlo techniques to estimate the conditional expectation in multi-stage non-linear filtering [J]. International Journal of Control, 1969, 9(5): 547-559.

[8] Handschin J E. Monte Carlo techniques for prediction and filtering of non-linear stochastic processes [J]. Automatica, 1970, 6(4): 555-563.

[9] Zaritskii V S, Sevtnik V B, Shimelevich L I. Monte-Carlo technique in problems of optimal information processing [J]. Automation and Remote Control, 1976, 36(12): 2015-2022.

[10] Gordon N J, Salmond D J, Smith A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation [J]. IEE proceedings F: Radar and Signal Processing, 1993, 140(2): 107-113.

[11] Ristic B, Arulampalam S, Gordon N. Beyond the Kalman filter: particle filters for tracking applications [M]. Boston: Artech House, 2004.

[12] Cappé O, Moulines E, Rydén T. Inference in Hidden Markov Models [M]. New York: Springer, 2005.

[13] Doucet A, Freitas N D, Gordon N. Sequential Monte Carlo methods in practice [M]. New York: Springer, 2001.

[14] Liu J S. Monte Carlo strategies in scientific computing [M]. New York: Springer, 2008.

[15] Wang S, Cui L, Cheng S, et al. Noise adaptive LDPC decoding using particle filtering [J]. IEEE Transactions on: Communications, 2011, 59(4): 913-916.

[16] Fernandez-Villaverde J, Rubio-Ramirez J F. Estimating macroeconomic models: a likelihood approach [J]. The Review of Economic Studies, 74(4): 1059-1087.

[17] Laska B N M, Bolic M, Goubran R A. Particle filter enhancement of speech spectral amplitudes [J]. IEEE Transactions on: Audio, Speech, and Langue Processing, 2010, 18(8): 2155-2167.

[18] Azzabou N, Paragios N, Guichard F. Image reconstruction using particle filters and multiple

hypotheses testing [J]. IEEE Transactions on: Image Processing, 2010, 19(5): 1181-1190.

[19] Zhou H, Sakane S. Sensor planning for mobile robot localization—a hierarchical approach using a bayesian Network and a Particle Filter [J]. IEEE Transaction on: Robotics, 2008, 24(2): 481-487.

[20] Foo P H. Combining the interacting multiple model method with particle filters for manoeuvring target tracking with a multistatic radar system [J]. Radar, Sonar & Navigation, IET, 2011, 5(7): 697-706.

[21] Mihaylova L, Hegyi A, Gning A, et al. Parallelized particle and gaussian sum particle filters for large-scale freeway traffic systems [J]. IEEE Transactions on: Intelligent Transportation Systems, 2012, 13(1): 36-48.

[22] Liu Y, Li H, Chen Y. Automatic tracking of a large number of moving targets in 3D [J]. Computer Science, 2012, 7575: 730-742.

[23] Hassan W, Bangalore N, Birch P, et al. An adaptive sample count particle filter [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2012, 116(12): 1208-1222.

[24] Brockwell A E, Rojas A L, Kass R E. Recursive Bayesian decoding of motor cortical signals by particle filtering [J]. Journal of Neurophysiology, 2004, 91(4): 1899-1907.

[25] 袁泽剑, 郑南宁, 贾新春. 高斯-厄米特粒子滤波器 [J]. 电子学报, 2003, 31(7): 970-973.

Yuan Zejian, Zheng Nanning, Jia Xinchun. The Gauss-Hermite particle filter [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(7): 970-973.

[26] 莫以为, 萧德云. 基于粒子滤波算法的混合系统监测与诊断 [J]. 自动化学报, 2003, 29(5): 641-648.

Mo Yiwei, Xiao Deyun. Hybrid system monitoring and diagnosing based on particle filter algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 641-648.

[27] 胡洪涛, 敬忠良, 李安平, 等. 非高斯条件下基于粒子滤波的目标跟踪 [J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(12): 1996-1999.

Hu Hongtao, Jing Zhongliang, Li Anping, et al. Particle filter based target tracking in non-gaussian environment [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(12): 1996-1999.

[28] 孟勃, 朱明. 粒子滤波算法在非线性目标跟踪系统中的应用 [J]. 光学精密工程, 2007, 15(9): 1421-1426.

Meng Bo, Zhu Ming. Nonlinear object tracking using particle filter [J]. Optics and Precision Engineering, 2007, 15(9): 1421-1426.

[29] 籍颖, 张漫, 刘刚, 等. 基于改进粒子滤波的农用车辆导航定位方法 [J]. 农业工程学报, 2011, 27(8): 227-231.

Ji Ying, Zhang Man, Liu Gang, et al. Positioning method of vehicle navigation system based on improved particle filter [J]. Transactions of the CSAE, 2011, 27(8): 227-231.

[30] 周翟和, 刘建业, 赖际舟, 等. 一种新的改进高斯粒子滤波算法及其在SINS/GPS深组合导航系统中的应用 [J]. 控制与决策, 2011, 26(1): 85-95.

Zhou Zhaihe, Liu Jianye, Lai Jizhou, et al. Novel Gaussian particle filter and its application in deeply integrated SINS/GPS navigation system [J]. Control and Decision, 2011, 26(1): 85-95.

[31] 张红燕, 谢跃雷, 欧阳缮. 平坦衰落信道下一种基于进化粒子滤波的盲检测器 [J]. 电子与信息学报, 2008, 30(6): 1413-1415.

Zhang Hongyan, Xie Yuelei, Ouyang Shan. A blind evolutionary particle filtering detector in flat fading channels [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2008, 30(6): 1413-1415.

[32] 杜正聪. 粒子滤波及其在 MIMO 无线通信中的应用研究 [D]. 成都: 电子科技大学, 2008.

[33] 彭真明, 李亚林, 魏文阁, 等. 粒子滤波非线性 AVO 反演方法 [J]. 地球物理学报, 2008, 51(4): 1218-1225.

Peng Zhenming, Li Yalin, Wei Wenge, et al. Nonlinear AVO inversion using particle filter [J]. Chinese Journal of Geophysics, 2008, 51(4): 1218-1225.

[34] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述 [J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.

Hu Shiqiang, Jing Zhongliang. Overview of particle filter algorithm [J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-365.

[35] 杨小军, 潘泉, 王睿, 等. 粒子滤波进展与展望 [J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 261-267.

Yang Xiaojun, Pan Quan, Wang Rui, et al. Development and prospect of particle filtering [J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(2): 261-267.

[36] 程水英, 张剑云. 粒子滤波评述 [J]. 宇航学报, 2008, 29(4): 1099-1111.

Cheng Shuiying, Zhang Jianyun. Review on particle filters [J]. Journal of Astronautics, 2008, 29(4): 1099-1111.

[37] 邹国辉, 敬忠良, 胡洪涛. 基于优化组合重采样的粒子滤波算法 [J]. 上海交通大学学报, 2006, 40(7): 1135-1139.

Zou Guohui, Jing Zhongliang, Hu Hongtao. A particle filter algorithm based on optimizing combination resampling [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2006, 40(7): 1135-1139.

[38] 叶龙, 王京玲, 张勤. 遗传重采样粒子滤波器 [J]. 自动化学报, 2007, 33(8): 885-887.

Ye Long, Wang Jingling, Zhang Qin. Genetic resampling particle filter [J]. Acta Automatica Sinica, 2007, 33(8): 885-887.

[39] 李良群, 姬红兵, 罗军辉. 迭代扩展卡尔曼粒子滤波器 [J]. 西安电子科技大学学报, 2007, 34(2): 233-238.

Li Liangqun, Ji Hongbing, Luo Junhui. Iterated extended kalman particle filtering [J]. Journal of Xidian University, 2007, 34(2): 233-238.

[40] 程水英, 张剑云. 裂变自举粒子滤波 [J]. 电子学报, 2008, 36(3): 500-504.

Cheng Shuiying, Zhang Jianyun. Fission bootstrap particle filtering [J]. Acta Electronica Sinica, 2008, 36(3): 500-504.

[41] 杨璐, 李明, 张鹏. 一种新的改进粒子滤波算法 [J]. 西安电子科技大学学报: 自然科学版, 2010, 37(5): 862-865.

Yang Lu, Li Ming, Zhang Peng. New improved particle filter algorithm [J]. Journal of Xidian University, 2010, 37(5): 862-865.

[42] 赵玲玲, 马培军, 苏小红. 一种快速准蒙特卡罗粒子滤波算法 [J]. 自动化学报, 2010, 36(9): 1351-1356.

Zhao Lingling, Ma Peijun, Su Xiaohong. A fast Quasi-Monte Carlo-based particle filter algorithm [J]. Acta Automatica Sinica, 2010, 36(9): 1351-1356.

[43] 胡振涛, 潘泉, 金勇, 等. 量测不确定条件下多传感器自适应粒子滤波算法 [J]. 控制与决策, 2012, 27(4): 547-556.

Hu Zhentao, Pan Quan, Jin Yong, et al. Multi-sensor adaptive particle filter in measurement uncertainty [J]. Control and Decision, 2012, 27(4): 547-556.

[44] 左军毅, 张怡哲, 梁彦. 自适应不完全重采样粒子滤波器 [J]. 自动化学报, 2012, 27(4): 647-652.
Zuo Junyi, Zhang Yizhe, Liang Yan. Particle filter based on adaptive path resampling [J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 27(4): 647-652.

[45] 张琪, 王鑫, 胡昌华, 等. 人工免疫粒子滤波算法的研究 [J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 293-297.
Zhang Qi, Wang Xin, Hu Changhua, et al. Research on artificial immune particle filter [J]. Control and Decision, 2008, 23(3): 293-297.

[46] 王成儒, 成润. 基于UPF-BP神经网络的视频跟踪研究 [J]. 电子技术, 2009(3): 81-83.
Wang Chengru, Cheng Run. The video tracking based on UPF and BP neural network [J]. Electronic Technology, 2009(3): 81-83.

[47] Kalman R E. A new approach to linear filtering and prediction problems [J]. Journal of Basic Engineering, 1960, 82(1): 35-45.

[48] Jazwinski A H. Stochastic processes and filtering theory [M]. New York: Academic Press, 1970.

[49] Alspach D, Sorenson H. Nonlinear Bayesian estimation using Gaussian sum approximations [J]. IEEE Transactions on: Automatic Control, 1972, 17(4): 439-448.

[50] Julier S J, Uhlmann J K. A new extension of the Kalman filter to nonlinear systems [C] // The Proceedings of AeroSense: The 11th International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulation and Controls. Orlando, 1997: 182-193.

[51] Ito K, Xiong K. Gaussian filters for nonlinear filtering problems [J]. IEEE Transactions on: Automatic Control, 2000, 45(5): 910-927.

[52] Masreliez C. Approximate non-Gaussian filtering with linear state and observation relations [J]. IEEE Transactions on: Automatic Control, 1975, 20(1): 107-110.

[53] West M, Harrlson P J, Migon H S. Dynamic generalized linear models and Bayesian forecasting [J]. Journal of the American Statistical Association, 1985, 80(389): 73-83.

[54] Bucy R S. Bayes theorem and digital realizations for non-linear filters [J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1969, 17: 80-94.

[55] Kramer S C, Sorenson H W. Recursive Bayesian estimation using piece-wise constant approximations [J]. Automatica, 1988, 24(6): 789-801.

[56] Sorenson H W. Recursive estimation for nonlinear dynamic systems [M] // Spall J C. Bayesian Analysis of Times Series and Dynamic Models. Boca Raton: CRC Press, 1988: 127-165.

[57] Kitagawa G. Non-Gaussian state-space modeling of Nonstationary time series [J]. Journal of the American Statistical Association, 1987, 82(400): 1032-1041.

[58] Pole A, West M. Efficient numerical integration in dynamic models [R]. Warwick: Department of Statistics, University of Warwick, 1988.

[59] 郭应焕. 蒙特卡罗方法简介 [J]. 物理, 1982(9): 525-531.

[60] Doucet A, Godsill S, Andrieu C. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering [J]. Statistics and Computing, 2000, 10(3): 197-209.

[61] Arulampalam M S, Maskell S, Gordon N, et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking [J]. IEEE Transactions on: Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.

[62] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo [J]. Proceeding of the IEEE, 2007, 95(5): 899-924.

[63] Kong A, Lie J S, Wong W H. Sequential imputations and Bayesian missing data problems [J]. Journal of the American Statistical Association, 1994, 89(425): 278-288.

[64] Kotecha J H, Djuric P M. Gaussian sum particle filtering [J]. IEEE Transactions on: Signal Processing, 2003, 52(10): 2602-2612.

[65] Merwe R V D, Doucet A, Freitas, et al. The unscented particle filter [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2001, 96(390): 584-590.

[66] Blanco J L, Gonzalez J, Fernandez-Madrigal J A. Optimal filtering for non-parametric observation models: applications to localization and SLAM [J]. The International Journal of Robotics, 2010, 29(14): 1726-1742.

[67] Pitt M K, Shephard N. Filtering via simulation: auxiliary particle filters [J]. Journal of the American Association, 1999, 94(446): 590-599.

[68] Gilks W R, Berzuini C. Following a moving target-Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models [J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B, 2001, 63(1): 127-146.

[69] Fox D. Adapting the sample size in particle filters through KLD-sample [J]. The International Journal of Robotics Research, 2003, 22(12): 985-1003.

[70] Schon T, Gustafsson F, Nordlund P J. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models [J]. IEEE Transactions on: Signal Processing, 2005, 53(7): 2279-2289.

A Review of Particle Filters

Lv Dechao[1,2], Fan Jiangtao[1,2], Han Gangweng[3], Ma Guangyi[1]

(1. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China, Email: kktflifj@126.com;

2. School of Physical Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. Beijing Aerospace Control Center, Beijing 100094, China)

Abstract: This paper reviews the algorithms for particle filtering. We first present the basic knowledge of the Recursive Bayesian Estimation, and the Importance Sampling/Resampling Techniques which are based on the Monte Carlo Method. We then describe in detail the two standard algorithms, Sequential Importance Sampling and Sequential Importance Resampling. We subsequently introduce recent progress in the research of particle-filtering algorithms to tackle issues encountered by the two standard algorithms in practical applications. We analyze key ideas of the new algorithms. We classify the new algorithms according to their improvements in the validity and real-time performance. We finally give some suggestions of future research directions.

Key words: Data processing; Particle-filtering algorithm; Review; Nonlinear filter; Recursive Bayesian Estimation; Importance Sampling/Resampling