摆镜平台寿命的 Bootstrap 估计*

王景宇^{1,2}, 戴妍峰^{1,2}

(1. 中国科学院国家天文台, 北京 100012; 2. 中国科学院太阳活动重点实验室(国家天文台), 北京 100012)

摘要: 摆镜平台是大口径空间天文望远镜图像稳定控制系统中的一个活动部件, 为评估其寿命, 进行了摆镜平台寿命试验。摆镜平台寿命试验为单子样寿命试验, 先验概率信息很少, 采用 Bayes 方法进行寿命估计有一定的困难。Bootstrap 方法是一种非参数统计方法, 它对未知分布不做任何假设, 仅利用计算机对原始样本数据进行再抽样模拟未知分布, 通过再生抽样将小样本问题转化成大样本问题。Bootstrap 方法要求子样数要大于等于 5。采用半经验虚拟增广子样和 Bootstrap 相结合的方法进行摆镜平台寿命的区间估计。在摆镜平台寿命服从威布尔(Weibull)分布的假定下, 通过以往类似产品寿命试验数据推断出威布尔分布形状参数, 然后用寿命试验值和威布尔分布形状参数推导出摆镜平台寿命的方差, 在此基础上进行子样虚拟增广。虚拟增广子样需要满足两个条件: (1) 增广子样的均值等于寿命试验值; (2) 虚拟增广子样的方差等于类似产品寿命的经验方差。根据这两个条件建立一个方程组, 用数值计算法求解方程组得到增广子样。这些作为 Bootstrap 区间估计原始样本的增广子样用于计算样本的经验分布和样本重抽样。通过重抽样得到 10 000 个样本, 计算每个样本的均值, 然后对 10 000 个均值进行排序, 得到均值 $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{10000}$, 采用分位数法计算置信水平为 $1-\alpha$ 的 Bootstrap 置信区间, 得到置信区间 (μ_{k_1}, μ_{k_2}) , 其中 $k_1 = [10\,000 \times \alpha/2]$, $k_2 = [10\,000 \times (1 - \frac{\alpha}{2})]$ 。寿命试验的加速因子为 5.5, 目前摆镜平台已正常工作 1.25 年, 按上述方法计算 0.95 置信水平的 Bootstrap 置信下限为 3.59 年, 如果正常工作两年, 0.95 置信水平的 Bootstrap 置信区间为 (5.93 年, 16.81 年)。

关键词: 摆镜平台; Bootstrap 方法; 增广子样; Weibull 分布; 置信下限

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-7673(2015)01-0096-06

摆镜平台是空间太阳望远镜图像稳定控制系统中的一个部件, 为研究摆镜平台在空间环境下的使用寿命, 国家天文台建立了摆镜平台寿命试验系统, 并在此系统上进行了摆镜平台寿命试验。由于摆镜平台是一种高可靠性且价格昂贵的产品, 因此, 在进行寿命试验时只采用一个摆镜平台作为试件。在这种情况下, 摆镜平台寿命评估属于单子样寿命试验评估问题。通常处理小子样估计的方法有 Bayes 方法和 Bootstrap 方法^[1-2]。由于摆镜平台的验前信息极少, 采用 Bayes 方法进行寿命评估有一定的困难。Bootstrap 方法是一种非参数统计方法, 它对未知分布不做任何假设, 仅利用计算机对原始样本数据进行再抽样模拟未知分布, 通过再生抽样将小样本问题转化成大样本问题^[3]。Bootstrap 方法要求子样数 $n \geq 5$, 为使用 Bootstrap 方法对摆镜平台寿命进行评估, 采用文[2]中的方法对子样数进行虚拟扩展, 将子样数由 1 增加到 5 以上, 然后再利用 Bootstrap 方法进行摆镜平台寿命估计, 给出摆镜平台平均寿命的置信区间和置信下限。

1 半经验虚拟增广子样与 Bootstrap 方法相结合的极小子样评估方法

文[2]给出了极小子样试验的半经验评估方法, 同时指出这种评估方法由于试验均值的标准差大

* 基金项目: 国家自然科学基金(11078018)资助。

收稿日期: 2014-03-18; 修定日期: 2014-04-24

作者简介: 王景宇, 男, 研究员. 研究方向: 天文仪器与方法. Email: wangjingyu@bao.ac.cn

导致置信下限下降很大。为克服这一缺点, 文[2]的作者提出了一种半经验虚拟增广子样与 Bootstrap 方法相结合的极小子样评估方法。

1.1 半经验虚拟增广子样方法

为使虚拟增广新子样所蕴含的随机特性与原子样随机性的差别在允许范围之内, 虚拟增广子样应满足下列条件:

- (1) 虚拟增广后的子样均值应与原来的子样均值相等;
- (2) 虚拟增广后的子样标准差与类似件的子样标准差相等。

具体增广方法如下: 设 T_0 为试验值, σ 为半经验所得的试验值的标准差, 由于试验中试件只有一个, 只得到一个试验值 T_0 , 因此, 只能以此试验值作为试验均值的估计值。虚拟增广子样为 $T_i, i=1, 2, \dots, n$, 其中某一子样值为 T_0 , 满足下列方程组:

$$\begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i = T_0 \\ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (T_i - T_0)^2 = \sigma^2 \end{cases} \quad (1)$$

采用数值计算的方法解上述方程组得到虚拟增广子样。

1.2 Bootstrap 方法

Bootstrap 方法是美国 Stanford 大学教授 Efron 于 1979 年提出的一种新的统计推断方法, 是一种只依赖于给定观测信息, 而不需要其它假设的统计推断方法。

设 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为来自未知总体分布 F 的子样, $\theta=\theta(F)$ 是总体分布的 F 的某个参数, F_n 是子样 X 的经验分布, $\hat{\theta}=\hat{\theta}(F_n)$ 是 θ 的估计, 估计误差记为

$$R(X, F) = \hat{\theta}(F_n) - \theta(F) \triangleq T_n,$$

由观测 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 估计 $R(X, F)$ 分布特征的基本步骤如下^[3]:

- (1) 将 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 按从小到大排序, 得到 $x_1^n \leq x_2^n \leq \dots \leq x_n^n$, 并由此构造经验分布函数 F_n :

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{当 } x < x_1^n \text{ 时} \\ \frac{i}{n} & \text{当 } x_i^n \leq x < x_{i+1}^n \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } x \geq x_n^n \text{ 时} \end{cases} \quad (2)$$

- (2) 从 F_n 中抽取子样

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*),$$

X^* 称为 Bootstrap 子样。

(3) 用 $R^*(X^*, F_n) = \hat{\theta}(F_n^*) - \hat{\theta}(F_n) \triangleq R_n$ 的分布逼近 $R(X, F)$, $R^*(X^*, F_n)$ 的分布称为 Bootstrap 分布, 其中 F_n^* 为 $X^*=(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 的经验分布; R_n 为 T_n 的 Bootstrap 统计量。

利用 R_n 的分布模拟 T_n 的分布, 可以对分布参数 θ 进行区间估计。

1.3 单子样寿命试验的区间估计

利用半经验虚拟增广子样与 Bootstrap 方法相结合的极小子样评估方法可进行单子样寿命试验的区间估计, 具体步骤如下:

- (1) 利用虚拟增广方法将子样由 1 个增广到 n 个;
- (2) 将 n 个子样值按从小到大顺序排列, 然后计算经验分布函数 F_n ;
- (3) 根据 F_n 进行重抽样, 获得抽样集合 $X_k^*=(x_{1,k}^*, x_{2,k}^*, \dots, x_{n,k}^*), k=1, 2, \dots, N$;
- (4) 利用上述抽样集合计算寿命的 Bootstrap 置信区间^[4]。

1.4 算例

文[2]给出了一个用此方法估计飞行器结构寿命的算例：一飞行器结构做了一次寿命试验，得出其寿命为 $T_0 = 20\,000$ h，由经验知其寿命为对数正态分布，对数寿命的标准差 $\sigma_Y = 0.17$ ，其中 $Y = \log T$ ，利用(1)式将 Y 由 1 个 $Y_0 = \log T_0 = 4.301$ ，虚拟增广到 5 个 $\{3.801, 4.105, 4.301, 4.497, 4.801\}$ ，再用 Bootstrap 方法求出均值估计密度分布，得到 Y 均值 90% 置信度下限为 4.084 76，对应寿命 T 均值的置信下限为 12 153 h。

2 摆镜平台寿命估计

2.1 摆镜平台寿命的分布

威布尔(Weibull)分布是瑞典物理学家 Weibull 在分析材料强度时推导的一种概率分布类型。由于威布尔分布含有两个或三个参数，它对各种类型试验数据拟合的能力强，因此，使用广泛，许多随机现象可认为近似服从威布尔分布。

若系统有 n 个部件，记第 i 个部件的寿命为 $T_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ，假设每个部件的寿命分布都为 $F(t)$ ，并假设 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 是相互独立的，记 $T_{\min}$ 为部件寿命 $T_1, T_2, \dots, T_n$ 中的最小值， $T_{\min} = \min\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ ，如果整个系统的寿命是所有部件中最薄弱的部件的寿命，则 $T_{\min}$ 就是系统的寿命。 $T_{\min}$ 的分布为 $F_{T_{\min}}(t) = 1 - [1 - F(t)]^n$ ，若 $F(t)$ 是 Weibull 分布，则 $F_{T_{\min}}(t)$ 也是 Weibull 分布。由 n 个部件组成的系统，若每个部件寿命分布为具有相同形状参数 m 的两参数 Weibull 分布，且部件寿命相互独立，则系统寿命为 Weibull 分布：

$$F_{T_{\min}}(t) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{t}{\left(1 / \sum_{i=1}^n \frac{1}{\eta_i^m}\right)^{\frac{1}{m}}} \right]^m \right\}, \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

式中， η_i 为各部件分布的比例参数。

寿命试验中的试件为德国 PI 公司的 S-340 型摆镜平台，由两对压电陶瓷触电器推动摆镜平台台面摆动，S-340 摆镜平台中的压电陶瓷促动器为 PI 公司的 PICMA (PI Ceramic co-fired multilayer actuators)，根据文[5] PICMA 的寿命服从两参数威布尔分布，形状参数 m 的平均值为 1.4。通过对摆镜平台构成部件的分析，认为摆镜平台寿命主要由 PICMA 决定。由于摆镜平台中两对 PICMA 的使用环境和工作条件相同，因此，可以认为其寿命分布的形状参数相同。假定摆镜平台的寿命为最薄弱的 PICMA 的寿命，根据(3)式摆镜平台寿命分布也为威布尔分布，且形状参数与 PICMA 相同为 1.4。

2.2 单子样摆镜平台寿命试验的寿命 Bootstrap 置信下限计算

文[6]给出了寿命服从威布尔分布情况下的半经验虚拟增广子样与 Bootstrap 结合的方法，将子样数由 1 虚拟增广到 7，用 Bootstrap 方法计算平均寿命的置信下限。用此方法计算摆镜平台平均寿命置信下限的过程如下：

摆镜平台寿命 T 服从两参数威布尔分布，概率密度函数为

$$f(T) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{T}{\eta} \right)^{m-1} e^{-(T/\eta)^m}, \quad T \geq 0, \quad m = 1.4, \quad \eta > 0 \quad (4)$$

式中， m 为形状参数； η 为比例参数。摆镜平台寿命 T 的均值、方差用 Γ 函数表示为

$$E(T) = \eta \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right), \quad (5)$$

$$D(T) = \eta^2 \left\{ \Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right) \right\}, \quad (6)$$

设 T_0 为摆镜平台寿命的试验值, 根据威布尔分布将其虚拟扩展为 7 个子样, 记为 $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$, 由于威布尔分布密度函数是偏态的, 因此, 在进行虚拟子样扩展时, 在试验值 T_0 左边取 4 个点, 右边取 2 个点, 且满足 $T_1 < T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6 < T_7$, 其中 $T_5 = T_0$ 。根据(1)式, 7 个扩展样本值还应满足以下约束条件:

$$\begin{cases} \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 T_i = T_0 \\ \frac{1}{7-1} \sum_{i=1}^7 (T_i - T_0)^2 = D(T) \end{cases}, \quad (7)$$

化简后为

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 = 6T_0 \\ T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 + T_6^2 + T_7^2 = 6D(T) + 6T_0^2 \end{cases}. \quad (8)$$

因为只有一个试验值 T_0 , 只能将它作为试验值均值的估值, 即 $E(T) \approx T_0$, 由(5)、(6)式及 $m = 1.4$ 得 $D(T)$

$$D(T) \approx \left(\frac{T_0}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \right)^2 \left\{ \Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{m}\right) \right\} = 0.525T_0^2. \quad (9)$$

将(9)式代入(8)式得

$$\begin{cases} T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_6 + T_7 = 6T_0 \\ T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 + T_4^2 + T_6^2 + T_7^2 = 9.15T_0^2 \end{cases}, \quad (10)$$

令 $T_i = k_i T_0, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$ 代入(10)式得

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_6 + k_7 = 6 \\ k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 + k_6^2 + k_7^2 = 9.15 \end{cases}. \quad (11)$$

利用数值计算方法解(11)式, 可给出 $k_i, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$, 由此得到扩展子样 X :

$$X = (k_1 T_0, k_2 T_0, k_3 T_0, k_4 T_0, T_0, k_6 T_0, k_7 T_0),$$

利用 X 计算摆镜平台平均寿命的 Bootstrap 置信区间, 具体步骤如下:

(1) 以 X 为原始样本独立抽取 N 个容量为 7 的 Bootstrap 样本 $X_k^* = (x_{1,k}^*, x_{2,k}^*, x_{3,k}^*, x_{4,k}^*, x_{5,k}^*, x_{6,k}^*, x_{7,k}^*), k = 1, 2, \dots, N$, 一般要求 $N \geq 1000$, 对第 i 个样本计算:

$$\hat{\mu}_k^* = \frac{x_{1,k}^* + x_{2,k}^* + x_{3,k}^* + x_{4,k}^* + x_{5,k}^* + x_{6,k}^* + x_{7,k}^*}{7}, k = 1, 2, \dots, N;$$

(2) 将 $\hat{\mu}_1^*, \hat{\mu}_2^*, \dots, \hat{\mu}_N^*$ 从小到大排序, 得 $\hat{\mu}_{(1)}^* \leq \hat{\mu}_{(2)}^* \leq \dots \leq \hat{\mu}_{(N)}^*$;

(3) 取 $k_1 = \lceil N \times \frac{\alpha}{2} \rceil, k_2 = \lceil N \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \rceil$, 以 $\hat{\mu}_{(k_1)}^*, \hat{\mu}_{(k_2)}^*$ 分别作为 $\hat{\mu}_{(\alpha/2)}^*, \hat{\mu}_{(1-\alpha/2)}^*$ 的估计, 得到 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的近似置信区间为 $(\hat{\mu}_{(k_1)}^*, \hat{\mu}_{(k_2)}^*)$, 置信下限为 $\hat{\mu}_{(k_1)}^*$ 。

为加快寿命试验的进程, 在寿命试验中引入了加速过程, 目前加速因子为 5.5。摆镜平台寿命试验从 2013 年 1 月 1 日开始, 到 2014 年 3 月 18 日已进行 442 天, 摆镜平台工作正常。因此, 可以认为寿命试验值 $T_0 = 442 \times 24 \times 5.5 = 58344$ h, h 表示小时。利用(11)式选出一组系数 $k_i, i = 1, 2, 3, 4, 6, 7$

$$\{0.3121, 0.4411, 0.5700, 0.6990, 1.7309, 2.2469\}$$

与 T_0 相乘得到的增广子样为

{18 209, 25 736, 33 256, 40 782, 58 344, 100 988, 131 093}

单位为 h。取 $N=10\ 000$ ，按上述 Bootstrap 置信区间的方法用 Matlab 编程计算，得到摆镜平台寿命 90%、95%、98% 和 99% 的 Bootstrap 置信区间，具体值见表 1。

如果摆镜正常工作 2 年，寿命试验值 $T_0 = 730 \times 24 \times 5.5 = 96\ 360$ h，摆镜平台寿命 90%、95%、98% 和 99% 的 Bootstrap 置信区间计算结果见表 2。

表 1 摆镜平台正常工作 442 天情况下寿命
Bootstrap 置信区间计算结果

Table 1 Confidence intervals for the lifetime of the tip-tilt platform at the time when it has been working normally for 442 days as calculated using our bootstrap method

置信度/%	置信下限/h	置信上限/h
90	35 766	84 146
95	31 468	89 163
98	28 598	96 688
99	26 808	99 916

表 2 摆镜平台正常工作 2 年情况下寿命
Bootstrap 置信区间计算结果

Table 2 Confidence intervals for the lifetime of the tip-tilt platform at the time when it has been working normally for 2 years as calculated using our bootstrap method

置信度/%	置信下限/h	置信上限/h
90	57 889	138 975
95	51 971	147 260
98	46 645	157 324
99	44 277	163 833

从表 1 可知 95% 置信区间为 [31 468 h, 89 163 h]，或 [3.59 年, 10.18 年]，置信下限为 $T_{0.95} = 31\ 468$ h = 3.59 年。

从表 2 可知 95% 置信区间为 [51 971 h, 147 260 h]，或 [5.93 年, 16.81 年]，置信下限为 $T_{0.95} = 51\ 971$ h = 5.93 年。

3 结 论

对单子样摆镜平台寿命试验，在摆镜平台近似服从威布尔分布的假定下，根据以往摆镜平台组件寿命试验数据推断威布尔分布的形状参数，在此基础上可以采用半经验虚拟增广子样与 Bootstrap 方法相结合的方法进行摆镜平台寿命的 Bootstrap 区间估计，给出摆镜平台寿命的置信区间和置信下限。

参考文献：

- [1] 冯蕴雯, 冯元生. 极小子样高可靠性成败型产品试验的贝叶斯评估方法研究 [J]. 机械科学与技, 1999, 18(2): 198-200.
Feng Yunwen, Feng Yuansheng. Study of Bayes' estimation for product test of extreme small-sample high-reliability safe-or-failure pattern [J]. Mechanical Science and Technology for Aerospace Engineering, 1999, 18(2): 198-200.
- [2] 冯蕴雯, 黄玮, 吕震宙, 等. 极小子样试验的半经验评估方法 [J]. 航空学报, 2004, 25(5): 456-459.
Feng Yunwen, Huang Wei, Lv Zhenzhou, et al. The semiempirical evaluation method for extreme small sample test [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2004, 25(5): 456-459.
- [3] 唐雪梅, 张金槐, 邵凤昌, 等. 武器装备小子样试验分析与评估 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2001.
- [4] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.
- [5] Pertsch P, Broich B, Block R, et al. Development of highly reliable piezo multilayer actuators

- and lifetime test under DC and AC operating conditions [EB/OL]. 2010 [2013-12-18]. http://www.piezo.ws/pdf/Development_Highly_Reliable_Piezo_Actuators_white_Paper_PI_Ceramic.pdf.
- [6] 杨海峰, 冯蕴雯, 冯元生. 单子样结构疲劳试验寿命评估方法研究 [J]. 机械设计与制造, 2010(9): 109-111.
- Yang Haifeng, Feng Yunwen, Feng Yuansheng. Research on reliability assessment of single sample [J]. Machinery Design & Manufacture, 2010(9): 109-111.

Estimation of the Lifetime of a Tip-Tilt Platform Using a Bootstrap Method

Wang Jingyu^{1,2}, Dai Yanfeng^{1,2}

(1. National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China,
Email: wangjingyu@bao.ac.cn; 2. Key Laboratory of Solar Activities, National Astronomical
Observatories, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100012, China)

Abstract: A tip-tilt platform is a movable component of the system for maintaining imaging stability in a large-aperture space telescope. There is an ongoing test to estimate the lifetime of a tip-tilt platform to be onboard a Chinese space solar telescope. This test has only a single sampling data point by nature. The prior probability distribution of the lifetime of a tip-tilt platform needed for any Bayesian lifetime estimation is also not available due to the scarcity of relevant lifetime data. A bootstrap method is a statistical method without parameterization, and it does not require any prior distribution. A bootstrap method, which can be employed with a computer, uses resampling to simulate the statistical distribution of interest. The resampling generates samples from a template sample which can be rather small (and is usually an actual sample). This effectively creates a large-size sample from a small-size sample. Generally, a bootstrap method requires the number of data points in its template sample to be no less than five. In this paper, we combine a semi-empirical sample virtual-augmentation method into a bootstrap method to estimate confidence intervals of the lifetime of the tip-tilt platform in the ongoing test. We take the lifetime of the tip-tilt platform to statistically follow a Weibull distribution, with the shape-parameter values of the Weibull distribution inferred from previous experimental data of similar products. The variance of lifetimes of similar tip-tilt platforms can be expressed by the shape-parameter values of the Weibull distribution and the recorded time of normally working of the platform in the test. Based on the expression the sample virtual-augmentation method numerically generates more data points to meet two statistical conditions, i. e., (1) their mean is equal to the recorded time of normally working of the platform, and (2) their variance is equal to the empirical variance of lifetimes of similar products. These data points constitute a template sample in our bootstrap estimation, in which 10000 samples are generated through resampling of the template sample. The mean of each generated sample is a statistical realization of lifetime. By sorting the means of the 10000 samples as $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{10000}$ we can find the confidence interval for a confidence level $1-\alpha$ as (μ_{k_1}, μ_{k_2}) , where $k_1 = \lceil 10000 \times \alpha / 2 \rceil$ and $k_2 = \lceil 10000 \times (1 - \frac{\alpha}{2}) \rceil$. We have accelerated the lifetime test by a factor of 5.5. Now that the tip-tilt platform has been working normally for more than 1.25 years (in actual time), our method yields a confidence interval at the 95% confidence level, (3.59 years, 10.18 years). If the tip-tilt platform can work normally for 2 years (in actual time), the confidence interval at the 95% level will be (5.93 years, 16.81 years).

Key words: Tip-Tilt Platforms; Bootstrap method; Augmented sample; Weibull distribution; Lower confidence bound